جلد ۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص ۲۳-۱۴
شناسه DOI: 10.22067/tmsj.2021.39660
https://tmsj.um.ac.ir
مقاله علمی-ترویجی

مروری بر پیدایش و تحول مفهوم تابع

مریم امیاری

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

amyari@mshdiau.ac.ir

چکیده. در این مقاله به بررسی تکامل تدریجی مفهوم تابع که یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات امروزی است، می‌پردازیم و سیر تحول این مفهوم را از قرون وسطی تا عصر حاضر مرور می‌کنیم.

۱. مقدمه

شاخه های متنوع ریاضیات به طور مستقیم یا غیر مستقیم با تابع سر و کار دارند. آنالیز ریاضی توابعی با یک یا چند متغیر و خواص آنها و مشتقات آنها را مورد بررسی قرار می‌دهد، نظریه دیفرانسیل و معادلات انتگرالی در صدد حل معادلاتی است که جواب آنها تابع است. آنالیز تابعی روی فضاهایی که عناصر آنها تابع هستند کار می کند، آنالیز عددی فرآیندهای کنترل خطاها در ارزیابی انواع مختلف تابع را مطالعه می کند. برخی دیگر از زمینه های ریاضی، با گسترش‌هایی از مفهوم تابع سر و کار دارند، به عنوان نمونه، در جبر عمل و رابطه و در منطق ریاضی توابع بازگشتی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

مفهوم ''تابع''، که امروزه اکثر ریاضیدانان پذیرفته‌اند، بسیار آهسته شکل گرفت. این مفهوم به راستی یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی است. در این مقاله مروری مختصر بر چگونگی شکل‌گیری آن داریم. همان‌گونه که

2020 Mathematics Subject Classification. 01A65

کلید واژگان. تابع، رابطه، تابع تحلیلی،متغیر مستقل، متغیر وابسته.
تاریخ: دریافت ۹۹/۸/۳ پذیرش ۹۹/۱۱/۱۰.

نقطه، خط و صفحه، مفاهیم بنیادین در هندسه اقلیدسی هستند، تابع، مشتق و انتگرال نیز اساس آنالیز ریاضی را که به مثابه قلب ریاضیات است، تشکیل می‌دهد.

مثال های خاصی از تابع را می توان در ریاضیات کهن یافت. به عنوان نمونه، شمارش به عنوان تناظری بین مجموعه‌ای از اشیا و قطعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی؛ چهار عمل اصلی به عنوان توابعی از دو متغیر؛ جدول های تقابلی بابلی[۱]؛ محاسبه مربع‌ها و مکعب‌ها و همچنین ریشه‌های دوم و سوم.

از دیدگاه تاریخی، برخی از ریاضی‌دانان تصور درستی از مفهوم امروزی تابع داشته و به نوعی به آن نزدیک شده بودند.

به عنوان مثال نیکلا اورسم[۲] $(1323 - 1382)$ که در بررسی پدیده فیزیکی دما، بین دما در یک نقطه و گسترش آن در راستای یک میله تمایز قائل شد و برای این دو کمیت اصطلاحات عرض (Latitudo) و طول (Logitudo) را به‌کار برد. درکارهای او ایده‌ای کلی از متغیرهای مستقل و وابسته دیده می شود. ولی ضرورت وجود مفهومی به نام تابع به عنوان یک مفهوم بنیادین در پژوهش های ریاضی، نسبتا جدید است و قدمت آن به قرن ۱۷ میلادی باز می‌گردد.

واقعیت این است که مفهوم تابع در ریاضیات به‌طور اتفاقی پدیدار نشد. بنتوکاراچا[۳] در سال ۱۹۵۱ نشان داد که استفاده از ابزارهای ریاضی در بررسی کمّی پدیده‌های طبیعی توسط گالیله $(1564 - 1642)$ و کپلر $(1571 - 1630)$ به دلیل نیاز به آن آغاز شد. گسترش استفاده از این ابزارها بر اساس توانایی‌هایی که جبر جدید (ابداع شده توسط ویت [۴]) دربیان مطالب فراهم می‌نمود و به خصوص هندسه تحلیلی که توسط دکارت و فرما ابداع شد، امکان پذیر گردید. بر خلاف تفکر قرون وسطایی، گالیله بر این باور بود که ریاضیات مناسب‌ترین زبان برای مطالعه طبیعت است. طبق نظر گالیله برای مطالعه یک پدیده می‌بایستی کمیت‌ها اندازه‌گیری شده و نظم بین آن‌ها مشخص شود و پس از آن، قواعد ریاضی که این روابط را توصیف می‌کنند به ساده‌ترین شکل ممکن به دست آیند.

در قرن های ۱۷ و ۱۸ میلادی، ریاضی و فیزیک بیشترین درهم‌آمیختگی را داشتند. نیوتون به عنوان یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان تمام دوران، فیزیکدان برجسته‌ای نیز بود. علاوه بر او بسیاری دیگر از ریاضی‌دانان شاخص مانند برنولی، لاگرانژ و فوریه نیز علاقه زیادی به مسائل فیزیکی داشتند.

سه عامل تاثیرگذار در شکل‌گیری و گسترش مفهوم تابع در قرن های ۱۷ و ۱۸ میلادی را می‌توان به ترتیب زیر برشمرد:

۱– استفاده از نمادگذاری جبری که حامل جنبه‌های مهمی مانند سادگی و دقت بود و دستکاری در عبارت‌های تحلیلی را مجاز می‌نمود و علاوه بر آن اطلاعات بسیاری را در خود جای می داد.

Babylonian tables of reciprocals[۱]

Nicola Oresme [۲]

Bento Caraça [۳]

Viète[۴]

۲- نمایش هندسی که ابزار شهودی درک مسئله را فراهم می‌کرد. مثال مهمی از آن ارتباط بین مماس بر یک خم و مشتق تابع است.

۳- روابط بین پدیده‌های فیزیکی که به دلیل وجود نظم، انگیزه اصلی را برای مطالعه خانواده‌های توابع فراهم آورد.

توابع ابزارهای فوق‌العاده ای برای مسائل وردشی هستند. یک کمیت ممکن است با زمان، یا در مکان، یا نسبت به کمیت‌های دیگر و یا به‌طور همزمان در ابعاد متعدد، تغییر کند. چنین تغییری ممکن است سریع یا کند باشد و یا در نقطه‌ای ناپدید شود. این تغییرات ممکن است از الگوهای ساده یا پیچیده و محدودیت‌های مختلف پیروی کنند. با ادراک امروزی ما همه این‌ها به کمک توابع قابل بیان هستند. اما ریاضی‌دانان در طول زمان با توابعی کارکردند که صرفاً متناظر با یک عبارت تحلیلی، یک نمایش هندسی یا یک پدیده مشخص فیزیکی نبودند. به این ترتیب مفهوم تابع شروع به تحول نمود و از مفهوم اولیه خود فاصله گرفت. این تحول لحظه‌های شگفت‌آوری نیز داشت، به عنوان مثال، پدیدار شدن تابعی که در همه نقاط پیوسته است ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

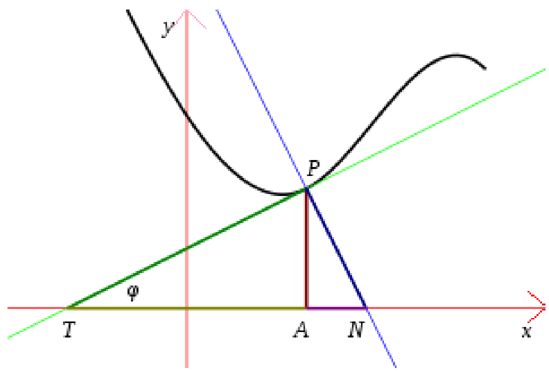
به‌طور خلاصه، دو جنبه اصلی درتکامل مفهوم تابع از اولویت برخوردار بودند: سازگاری و کلیت. البته بحث‌های پیش آمده تنها به جنبه‌های مجرد محدود نمی‌شد بلکه در راستای مسائل اصلی ریاضیات در عصر خود حرکت می‌کرد. در ادامه با جزئیات بیشتری به بررسی سیر این تحول می‌پردازیم. عمده مطالب این مقاله برگرفته از مراجع [۲، ۷] است.

۲. مفهوم تابع در قرن هفدهم، هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم

ضرورت وجود مفهوم تابع به عنوان یک شئ مستقل ریاضی را می‌توان در آغاز حساب بی‌نهایت کوچک‌ها ردیابی کرد. دکارت ($1596-1650$) آشکارا بیان کرد که یک معادله از دو متغیر که از نظر هندسی به وسیله یک خم نمایش داده می‌شود، وابستگی بین مقادیر متغیرها را نشان می‌دهد، و به این ترتیب ایده مشتق به عنوان راهی برای یافتن مماس بر این خم در هر نقطه، پدیدار شد.

لایب‌نیتس ($1646-1716$) اولین کسی بود که در سال ۱۶۷۳ از اصطلاح ''تابع'' استفاده کرد. او اصطلاح تابع را برای نشان دادن این که کمیت‌های هندسی مانند پاره‌خط‌های تحت مماس (TA) و تحت قائم (AN) بر یک خم به مکان نقطه روی خم وابسته هستند، به کار برد، نمودار ۱ را ببینید. وی همچنین اصطلاحات ''ثابت''، ''متغیر'' و ''پارامتر'' را معرفی کرد.

باگسترش مطالعه خم ها به کمک روش های جبری، اصطلاحی برای نمایش مقادیر وابسته به یک متغیر با استفاده از یک عبارت تحلیلی، به طور روزافزون لازم شد. سرانجام، بین سالهای ۱۶۹۴ و ۱۶۹۸، اصطلاح ''تابع''برای این هدف در مکاتبات ممتد بین لایب نیتس و ژان برنولی ($1667-1748$) پذیرفته شد. با این وجود، اصطلاح تابع تا انتشار واژه نامه ریاضی در سال ۱۷۱۶ ظاهر نگردید. ولی دو سال بعد برنولی مقاله‌ای نوشت که بازتاب گسترده ای داشت و تعریف تابع را از قید صورت‌های هندسی آن رها کرد و نوشت



نمودار ۱: نمایش پاره خط تحت مماس و پاره خط تحت قائم بر یک خم

''تابعِ یک مقدار متغیر، کمیتی است که به نوعی ازآن متغیر و مقادیرثابت تشکیل شده است''. اویلر دانشجوی سابقِ برنولی، بعداً از اصطلاح ''عبارت (ضابطه) تحلیلی[۵]''به جای 'کمیت'' برای تعریف تابع استفاده کرد.

بنابراین مفهوم تابع در عمل با مفهوم ''عبارت تحلیلی''یکسان گرفته شد. این اصطلاح به زودی به تناقض های متعددی منجر شد. در واقع، یک تابع می توانست توسط چندین عبارت تحلیلی متفاوت مشخص شود. از سوی دیگر و به زبان امروزی، می توان گفت که تعریف اویلر فقط توابع تحلیلی، که یک زیر مجموعه کوچک از مجموعه کوچک دیگری یعنی توابع پیوسته است، را در بر می گرفت.

نیوتن $(1642 - 1727)$ یکی از اولین ریاضی‌دانانی بود که مفهوم تابع را به‌کار برد. او از لغت ''fluent'' برای معین کردن متغیر مستقل و همچنین از کلمه ''relata quantitas'' برای نمایش متغیرهای وابسته و لغت ''genita'' برای ارجاع به مقادیر بدست آمده از بقیه با استفاده از چهار عمل اصلی حسابان، استفاده کرد. او همچنین نشان داد چگونه توابع می‌توانند به صورت یک سری توانی نامتناهی نمایش داده شوند.

اویلر $(1707-1793)$ با آگاهی ازکاستی‌ها تعریف دیگری ارائه داد که در آن زمان مورد توجه قرار نگرفت، او تابع را با یک نمودار تعبیر کرد ولی هرگز کاری ساختار یافته در مورد توابع انجام نداد. درکارهای اویلر و در زمان او، توجه معطوف به توابع خاص حقیقی بود که در هندسه، مکانیک، نجوم، احتمال و سایر کاربردها ظاهر می‌شدند. مطالعه این توابع زمینه‌ای گسترده و چندجانبه در پژوهش را گشود که خیلی زود چندجمله‌ای‌های متعامد را نیز شامل شد، حالت خاصی از نظریه ای کلی که در آینده‌ای دور پدید آمد.

در یک مسیر متفاوت، لاگرانژ $(1736 - 1813)$ حساب دیفرانسیل خود را بر این اساس بنا نهاد که همه توابع تحلیلی هستند و به صورت موضعی در نزدیکی هر نقطه‌ای بسط سری توانی دارند.

تا آنجا که به جریان اصلی ریاضیات مربوط می شود، درطول قرن هجده میلادی، مشخص کردن یک تابع از طریق عبارت تحلیلی بدون تغییر باقی ماند. اما در قرن نوزدهم، مفهوم تابع طوری دستخوش گسترش و شفاف‌سازی‌های پی‌درپی قرار گرفت که ماهیت و معنی آن را عمیقاً تغییر کرد.

[۵] Analytical expression

بحث و جدل در مورد مساله "تارهای مرتعش" پیشرفت قابل توجهی در جهت گسترش مفهوم تابع ایجاد کرد. این مساله توسط معادله زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

که در آن y متغیر وابسته است و تغییر مکان از موقعیت تعادل را نشان می‌دهد. همچنین x فاصله از مبدا و t زمان را نشان می‌دهند . مجادله درگرفته میان دالامبر $(1717 - 1783)$ که توابعی را در نظر می‌گرفت که در واقع باید جواب این مساله باشند، با ریاضی‌دانانی مانند اویلر و برنولی منجر به بحث در مورد جواب‌های کلی معادله شد.

کارهای فوریه $(1768 - 1830)$ که جریان دما در یک جسم را مطالعه می‌کرد، سهم مهمی در تکامل مفهوم تابع توسط معاصرانش داشت. در واقع تعبیر اویلر از توابع حقیقی دلخواه که توسط نمودارهای آنها داده می‌شد، از حدود سال ۱۸۰۷ مورد توجه ژوزف فوریه قرار گرفت و در سال ۱۸۲۲ در شاهکار او[۶] که نقطه عطفی در تکامل آنالیز کلاسیک و فیزیک ریاضی بود، اوج گرفت (به [۵] مراجعه کنید). فوریه دما را تابعی از دو متغیر زمان و فضا در نظر می‌گرفت. وی از کشف اویلر که در سن ۷۰ سالگی به آن دست یافته بود در مورد دستگاه متعامداز توابع مثلثاتی که در سری

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ظاهر می‌شوند، استفاده کرد تا نشان دهد که حتی یک تابع ناپیوسته متناوب را می‌توان بر حسب یک سری مانند فوق، بسط داد. امروزه به افتخار کار فوریه، این سری ها که ضرایب آن توسط فرمول اویلر به صورت

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

داده می‌شود، سری فوریه نامیده می‌شوند، هرچند که فوریه هیچ نقشی در نظریه بنیادی این سری‌ها نداشته است و در واقع ابداع آنها توسط دانیل برنولی در سال ۱۷۵۰ و در ارتباط با مساله تارهای مرتعش، انجام پذیرفته است. فوریه حدس زد که شاید بتوان هر تابع را در یک بازه مناسب به یک سری مثلثاتی بسط داد ولی هرگز اثبات ریاضی از این حدس ارائه نداد.

این ادعای فوریه، که توابع ناپیوسته می توانند توسط یک سری نامتناهی با توابع پیوسته (و حتی تحلیلی) از توابع بیان شوند، معاصرانش به ویژه، دیریکله $(1805 - 1859)$ در برلین و ریمان $(1826 - 1866)$ در گوتینگن، را حیرت زده کرد. دیریکله که در پاریس تحصیل کرده بود، اولین اثبات دقیق از همگرایی سری فوریه را برای رده بزرگی از توابع متناوب (آنهایی که به جز در تعداد متناهی ماکزیمم و مینمم موضعی پیوسته هستند

[۶] La Théorie de Analytique la Chaleur (۱۸۲۲).

و منحنی پرشی تا بی نهایت ندارد) ارائه داد. برای انجام این کار، او ناچار بود مفهوم تابع را از نمایش تحلیلی آن جدا کند و این کار را در سال ۱۸۳۷ با ارائه تعریف تابع به عنوان تناظری دلخواه بین متغیرهای عددی، انجام داد. به تعبیر او، "یک تابع تناظری است بین دو متغیر که به هر مقدار از متغیر مستقل، یک و فقط یک مقدار از متغیر وابسته متناظر می کند". چندی بعد "جمله به هر مقدار از متغیر مستقل " به جمله "به هر مقدار از متغیر مستقل که متعلق به مجموعه خاصی (دامنه تابع) است" تغییر یافت. این تعریف آنقدر کلی بود که می توانست تابع را بدون داشتن فرمول (ضابطه) ریاضی فقط با کلمات معین کرد. مثلاً وی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{گویا است x} \\ 0 & \text{گنگ است x} \end{cases}$$

را به عنوان تابعی که در هیچ نقطه ای پیوسته نیست معرفی کرد [۳]. این تابع بعدها به نام تابع دیریکله معروف شد. از دیدگاه ریاضی دانان قرن هجدهم، هیچ فرمول (ضابطه) ریاضی وجود ندارد که به کمک آن بتوان تابع دیریکله را محاسبه کرد. در صورتی که چنین تعریفی تابع را به طور کامل مشخص می کند. مثلاً می توانیم بگوییم $f(\frac{2}{3}) = 1, \quad f(\sqrt{2}) = 0$.

حتی قبل از تلاش‌های دیریکله برای دقت بخشیدن به نتایج فوریه، لویی کوشی $(1789 - 1857)$ کارهای زیادی برای روشن شدن مفهوم تابع انجام داده بود. وی نه تنها اثبات قابل قبولی را از این واقعیت که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است به انجام رسانده بود، بلکه یک مثال از یک تابع کراندار بی نهایت بارمشتق پذیر

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را ارائه کرد که نمی تواند در همسایگی $x = 0$ با یک سری توانی بر حسب x بیان شود.

۳. مفهوم تابع در نیمه دوم قرن نوزدهم

بیش از همه، این ریمان $(1826 - 1866)$ و وایراشتراوس $(1815 - 1897)$ بودند که ایده های آنها حول و حوش سال ۱۸۸۰ نظریه توابع را چه در حالت حقیقی و چه مختلط، احاطه کرده بود. مقاله ریمان در سال ۱۸۵۴ بر اساس کار دیریکله، دومین پیشرفت اساسی در نظریه سری های فوریه بود. ریمان انگیزه یافته بود تا نظریه انتگرال توابع کراندار را بسیار دقیق‌تر و کلی‌تر از نظریه انتگرال کوشی برای توابع پیوسته، خلق کند. او در سال ۱۸۵۴ تابعی به شکل زیر تعریف کرد (این نتایج در سال ۱۸۶۷ منتشر شد):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] & x < [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & x > [x] + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

سپس نشان داد $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود نقاط ناپیوستگی f دقیقا نقاط $x = \frac{p}{2n}$ هستند که p و n نسبت به هم اولند. همچنین این تابع در نقاط ناپیوستگی، حد چپ و راست دارد و پرش‌ها در این نقاط با نزدیک شدن به نقطه صفر به مقدار صفر نزول می کنند. با این تعریف تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و اگر F تابع اولیه آن باشد، تابعی پیوسته است که در نقاط ناپیوستگی f مشتق‌پذیر نیست. از آنجا که تصور هندسی F ناممکن بود، این تابع در آن روزگار چندان خوشایند به نظر نمی‌رسید، ولی چون نقاطی که تابع در آن مشتق‌پذیر نبود زیر مجموعه ای از اعداد گویا بود، مورد پذیرش قرار گرفت.

کارهای ریمان نقطه آغاز بحث‌های بعدی در مورد سری فوریه و توابع حقیقی توسط ریاضی‌دانانی مانند هاینه، اسکولی، دینی و ریموند بین سال‌های ۱۸۷۰ تا ۱۸۷۵ شد. در مقالات این سالها پرسش‌هایی مانند همگرایی، انتگرال گیری جمله به جمله، مجموعه ناپیوستگی‌ها و مانند آن، مطرح شدند.

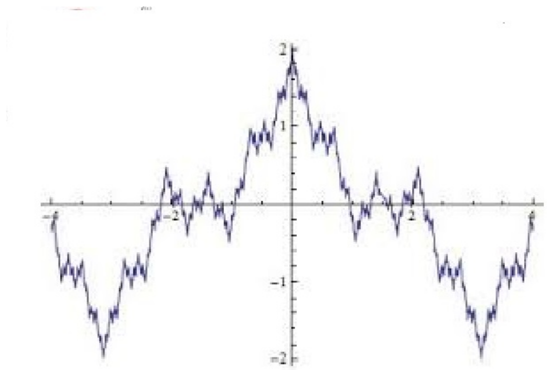
موثرترین مدافع دقت در این دوران، وایراشتراس $(1815 - 1897)$ بود. وی در طول زندگی طولانی خود، بر خلاف ریمان که از شهود هندسی و فیزیکی استفاده می کرد، بر دقت فرمول‌بندی آنالیزی تاکید بسیار داشت. تاکید او بر تعریف‌های دقیق و کلی در آنالیز مختلط و همچنین روحیه نقادانه او نسبت به آنالیز حقیقی اصطلاح ”دقت وایراشتراسی“ را که توسط کلاین ابداع شده بود، بر سر زبان ها انداخت. وایراشتراس در سال ۱۸۷۲ تابع حقیقی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ 0 < a < 1,\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$ b عدد صحیح فرد است

را معرفی کرد که در سرتاسر مجموعه اعداد حقیقی پیوسته و در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست، شکل ۲ را ببینید.

از سوی دیگر داربو $(1842 - 1917)$ در نوشته معروف خود (۱۸۷۵) مثالی از تابعی پیوسته ارائه کرد که در هیچ بازه‌ای صعودی یا نزولی نیست، و علاوه بر آن‌که قابل نمایش به وسیله سری توانی نیست نمی‌توان آن را رسم کرد.

این مثال‌ها سبب بازنگری اساسی در آنالیز ریاضی گردید و این شیوه برخورد با مسئله، پرسش ها و مفاهیم جدیدی را در ارتباط با توابع مطرح کرد. آیا توابع کلی که با سری مثلثاتی نمایش داده می‌شوند برای ریاضی‌دانان مزیتی دارند یا فقط توابعی که با سری های توانی نمایش داد می‌شوند، مفید هستند؟ فایده این توابع عجیب



نمودار ۲: یکی از مجموع‌های جزئی سری $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ که به تابع وایراشتراوس معروف است. این تابع همه جا پیوسته است ولی هیچ‌جا مشتق پذیر نیست.

و غریب یا آنهایی که نمایشی به صورت سری توانی ندارند چیست؟ آیا وحشت هرمیت $(1822 - 1901)$ از توابع پیوسته‌ای که هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند، موجه است؟

۴. تابع از آغاز قرن بیستم تا عصر حاضر

وضعیت پیش آمده در اواخر قرن نوزده، توسط فرژ[۷] $(1848 - 1925)$ به درستی جمع‌بندی شد [۴]. او دریافت که اطلاق کلمه ''تابع'' با گسترش علم، وسعت یافته است. در واقع اعمال سنتی مانند چهار عمل اصلی، توان‌ها و وارون آنها، دیگر برای ساختن توابع کافی نبود و اعمالی مانند حدگیری نیز وارد کار شده بودند. فرژ از این هم فراتر رفت و اظهار داشت که لزومی ندارد فقط اشیأ ریاضی دامنه و مقدار تابع را مشخص نمایند. به عنوان مثال او می گوید '' اگر امپراطوری آلمان را به عنوان مقداری در دامنه متغیر فرض کنیم، آنگاه برلین می‌تواند مقدار تابع برای این مقدار متغیر را نشان دهد''.

در اواخر قرن نوزدهم، با گسترش نظریه مجموعه‌ها که توسط گئورگ کانتور $(1845 - 1918)$ آغاز شد و باعث تحولی عمیق در ریاضیات گردید، مفهوم تابع نیز به تکامل ادامه داد. در قرن بیستم، تابع به همه تناظرهای دلخواه بین مجموعه‌ها (چه عددی و چه غیر عددی) که در شرط یکتایی مقدار صدق کند، گسترش یافت. در سال های آغازین قرن بیستم، پس از کارهای وایراشتراس، داربو و کانتور وضعیت روشن‌تر ولی بسیار متغیر بود. در حالی که بسیاری از ریاضی‌دانان به این موضوع علاقه‌ای نشان نمی‌دادند و حتی از آن اجتناب می‌ورزیدند، عده کمی با انگیزه‌های متفاوت سعی در پاسخ دادن به سؤالات گوناگون داشتند، برای اطلاعات دقیق‌تر به [۱] رجوع کنید.

---

[۷] Gottlob Ferge

با ادامه تکامل مفهوم تابع، ریاضی‌دانان تابع را از تناظر به سمت رابطه سوق داده‌اند. یک خویشاوند نزدیک به مفهوم تابع، مفهوم ریخت در نظریه رسته‌ها است. از طرفی درنظریه محاسبات، تابع به عنوان یک قاعده محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. همچنین در منطق و علوم رایانه از الگوریتم‌ها استفاده می‌شود که نمونه‌ای از توابع بازگشتی هستند.

امروزه ریاضیات مانند گذشته به طور اختصاصی به علوم فیزیکی وابسته نیست. این علم به طور گسترده‌ای دامنه کاربرد خود را وسعت داده و به ابزاری قوی در مطالعه پدیده‌های زیست‌شناسی، علوم انسانی و اجتماعی، اقتصاد و تجارت، ارتباطات، مهندسی و فن آوری تبدیل شده است. ریاضیات زیرساختی را برای توصیف، تشریح، پیش‌بینی و کنترل فراهم می آورد. تمام کاربردهای ریاضیات زمینه‌ای برای مفهوم مدل هستند. یک مدل ریاضی نمایشی است که عناصر اساسی در یک وضعیت داده شده را توصیف و در عین حال عناصر غیر ضروری را حذف می‌کند. یک مدل می تواند صورت‌های متفاوتی داشته باشد، ولی معمولاً از متغیرها، روابط بین این متغیرها و نرخ تغییرات آنها تشکیل می شود. فرآیند ساختن یک مدل مراحلی دارد، از شناخت موقعیت اولیه گرفته تا توصیف ریاضی آن و سپس بازگشت دوباره به آن موقعیت. بسیار مهم است که در هر مرحله تاثیر عوامل بیرونی مختلف را مشخص نماییم. به این منظور لازم است که روابطی به فرم تابع بین پارامترهایی که این عوامل را تعریف می کنند و متغیرهای اصلی برقرار کنیم. بنابراین می توان گفت که امروزه مدل‌های ریاضی از مهمترین کاربردهای مفهوم تابع در شاخه‌های مختلف علم هستند.

این دامنه نفوذ همچنان ادامه دارد و بدون تردید با هر پیشرفت جدید علمی، گستره کاربرد این مفهوم ریاضی نیز وسیع‌تر می‌شود و با قدرت و زیبایی به توصیف پدیده‌های نو یاری می‌رساند.

۵. سخن پایانی

دیدیم که در آغاز، مفهوم تابع برای معین کردن تناظر بین اشیای هندسی به کار برده می‌شد و در ادامه از طریق ارتباطش با مطالعه عبارت‌های تحلیلی، جایگاه ویژه‌ای در جریان اصلی تفکر ریاضی به خود اختصاص داد. برای نشان دادن نقش تاریخی این مشارکت، یوشکوویچ در [۷] می‌گوید:

”معرفی تابع به روش تحلیلی، تحولات بنیادین در ریاضیات ایجاد کرد و به دلیل کارآیی فوق‌العاده، این مفهوم دارای جایگاه کانونی در تمام علوم شده است.“

در واقع ارتباط بین عبارت‌ها (ضابطه‌ها)ی تحلیلی و اشیاء هندسی (نمودارها) آنقدر پرثمر است که هنوز هم جایگاه خود را در عمل و در ریاضیات امروزی آشکار می‌سازد.

در طول زمان مفهوم تابع دستخوش دگرگونی‌های بسیار شد. توابعی با رفتارهای کاملاً نامتعارف ظهور کردند و موجب طرح سؤالات بسیاری گردیدند. تابع هم به نفوذ خود در سایر علوم ادامه داد و هم در شاخه های نوپدید ریاضیات با دیدگاه‌هایی متفاوت ظاهر شد.

خلاصه آن که، قالب واحدی برای نگرش به مفهوم تابع و به کار بردن آن وجود ندارد و هر شاخه علم بسته به نیاز خود، قالب مورد نیاز خود را برمی‌گزینند. امروزه توابعی که در آنالیز ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گیرند

و در برنامه‌های کاربردی استفاده می‌شوند، در بررسی وابستگی بین متغیرهای عددی نقش اساسی دارند و به همین دلیل، مفهوم تابع عددی به عنوان تناظری بین متغیرها، صرف نظر از ماهیت آنها، در کاربردهای امروزی هم به نقش کلیدی خود ادامه می‌دهد. توابعی که در جبر در نظر گرفته می شوند، بر مفهوم رابطه تاکید دارند و آنهایی که در منطق ریاضی و علوم رایانه ظاهر می‌گردند بیشتر از جنبه‌های الگوریتمی برخوردارند. برکسی پوشیده نیست که این مفهوم سایه خود را بر تمامی پهنای علم گسترانده است و پیشرفت های امروزی علم بدون وجود و به کار بردن آن قابل تصور نخواهد بود.

مراجع

[1] L. Bianco, *The concept of function at the beginning of the 20th Century: A historiographical approach* , Transversal: International Journal for the Historiography of Science, **5** (2018) 171–192.

[2] G. Birkhoff, E. Kreyszig, *The establishment of functional analysis,* Historia Math. **11** (1984), no. 3, 258–321.

[3] G.L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonomëtriques qui servent à reprësenter une fonction arbitraire entre des limites données*, (French) J. Reine Angew. Math. **4** (1829) 157–169.

[4] G. Frege, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* Oxford: Peter Geach and Max Black, 1960.

[5] J.B.J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur,* Cambridge Library Collection - Mathematics, 2009.

[6] J.P. Ponte, *The history of the concept of function and some educational implications,* The Mathematics **3** (1992) 9 pages.

[7] A.P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. History Exact Sci. **16** (1976/77), no. 1, 37–85.